

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2010

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

*Durée de l'épreuve : 3 heures*

*Coefficient : 7*

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.

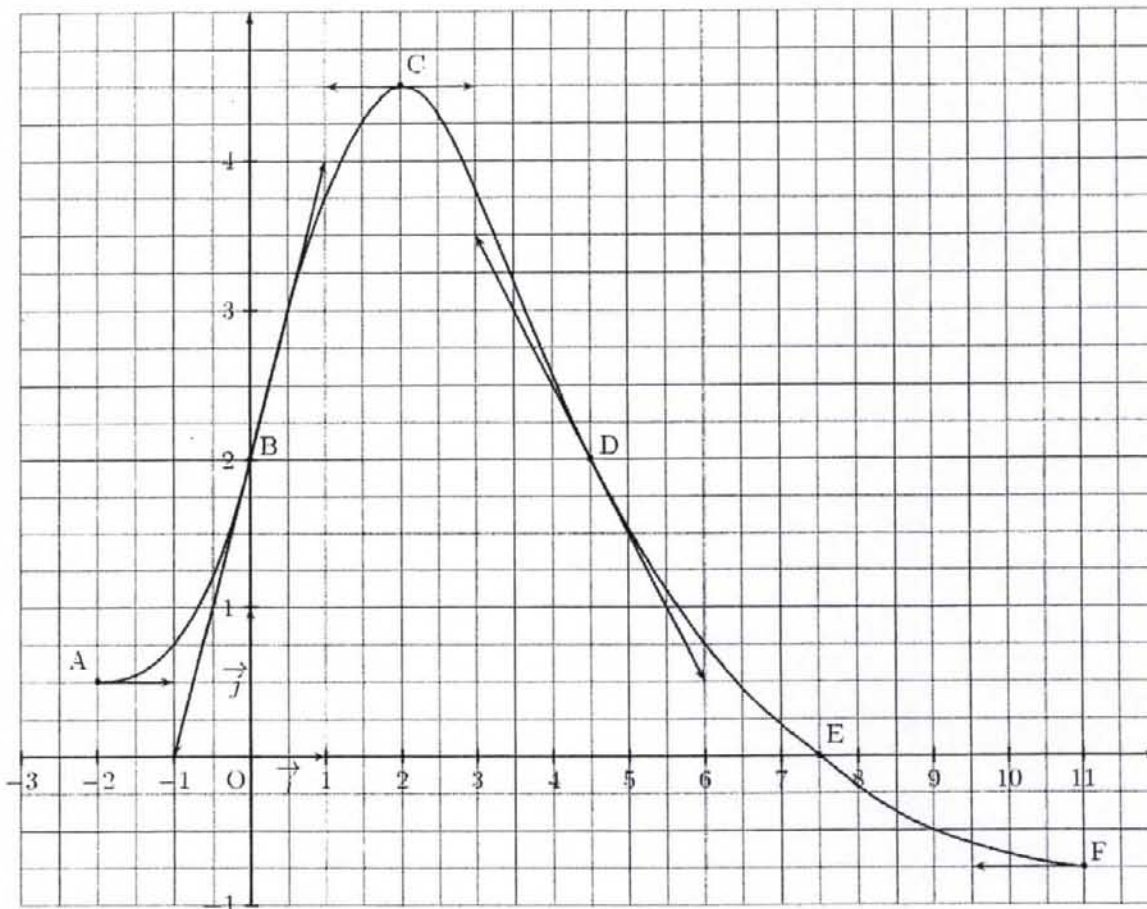
*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.*

**EXERCICE 1** (5 points)

*Commun à tous les candidats*

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[-2 ; 11]$ , et on donne sa courbe représentative  $C_f$  dans un repère orthogonal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , figure ci-dessous.



On sait que la courbe  $C_f$  passe par les points  $A(-2 ; 0,5)$ ,  $B(0 ; 2)$ ,  $C(2 ; 4,5)$ ,  $D(4,5 ; 2)$ ,  $E(7,5 ; 0)$  et  $F(11 ; -0,75)$ .

Les tangentes à la courbe  $C_f$  aux points A, B, C, D et F sont représentées sur la figure. On utilisera les informations de l'énoncé et celles lues sur la figure pour répondre aux questions.

Pour chacune des questions, une seule des réponses **A**, **B** ou **C** est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note est ramenée à 0.

1)  $f'(0)$  est égal à :

**A** :  $\frac{1}{2}$

**B** : 2

**C** : 4

2)  $f'(x)$  est strictement positif sur l'intervalle :

**A** :  $]0 ; 11[$

**B** :  $]0 ; 7,5[$

**C** :  $] -2 ; 2[$

3) Une équation de la tangente à la courbe  $C_f$  au point D est :

**A** :  $y = -x + 6,5$

**B** :  $y = x - 6,5$

**C** :  $y = -2x + 11$

4) Une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-2 ; 11]$  :

**A** : admet un maximum en  $x = 2$ .

**B** : est strictement croissante sur l'intervalle  $[-2 ; 7,5]$ .

**C** : est strictement décroissante sur l'intervalle  $]2 ; 11[$ .

5) Sur l'intervalle  $[-2 ; 11]$ , l'équation  $\exp(f(x)) = 1$  :

**A** : admet une solution.

**B** : admet deux solutions.

**C** : n'admet aucune solution.

## EXERCICE 2 (5 points)

*Commun à tous les candidats*

Un commerçant spécialisé en photographie numérique propose en promotion un modèle d'appareil photo numérique et un modèle de carte mémoire compatible avec cet appareil.

Il a constaté, lors d'une précédente promotion, que :

- 20 % des clients achètent l'appareil photo en promotion.
- 70 % des clients qui achètent l'appareil photo en promotion achètent la carte mémoire en promotion.
- 60 % des clients n'achètent ni l'appareil photo en promotion, ni la carte mémoire en promotion.

On suppose qu'un client achète au plus un appareil photo en promotion et au plus une carte mémoire en promotion.

Un client entre dans le magasin.

On note A l'événement : « le client achète l'appareil photo en promotion ».

On note C l'événement : « le client achète la carte mémoire en promotion ».

1) a) Donner les probabilités  $p(\bar{A})$  et  $p(\bar{A} \cap \bar{C})$ .

b) Un client n'achète pas l'appareil photo en promotion. Calculer la probabilité qu'il n'achète pas non plus la carte mémoire en promotion.

2) Construire un arbre pondéré représentant la situation.

3) Montrer que la probabilité qu'un client achète la carte mémoire en promotion est 0,34.

4) Un client achète la carte mémoire en promotion. Déterminer la probabilité que ce client achète aussi l'appareil photo en promotion.

5) Le commerçant fait un bénéfice de 30 € sur chaque appareil photo en promotion et un bénéfice de 4 € sur chaque carte mémoire en promotion.

a) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité du bénéfice par client. Aucune justification n'est demandée.

Bénéfice par client en euros	0			
Probabilité d'atteindre le bénéfice	0,6			

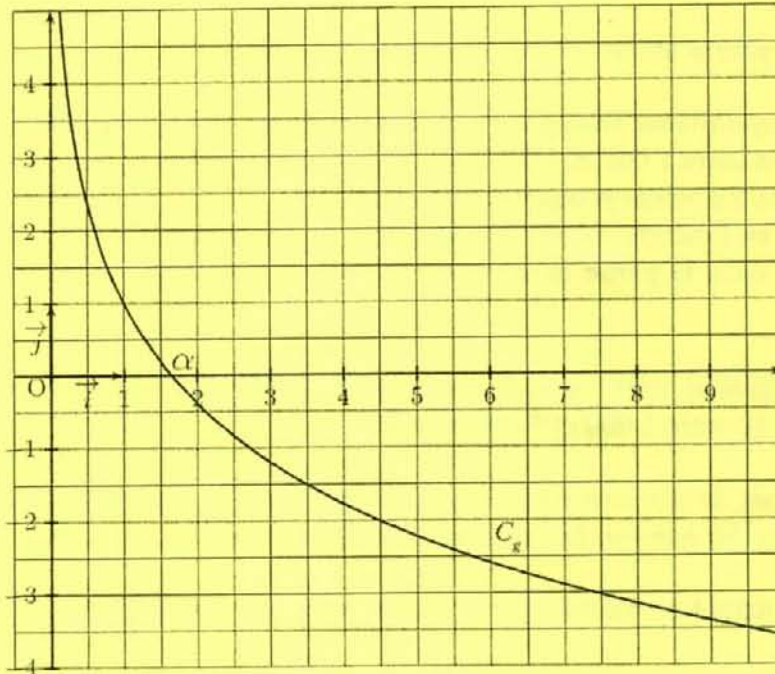
b) Pour 100 clients entrant dans son magasin, quel bénéfice le commerçant peut-il espérer tirer de sa promotion ?

6) Trois clients entrent dans le magasin. On suppose que leurs comportements d'achat sont indépendants.

Déterminer la probabilité qu'au moins un de ces trois clients n'achète pas l'appareil photo en promotion.

**EXERCICE 3** (5 points)*Commun à tous les candidats***Partie A – Étude préliminaire**

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = 1 - 2\ln(x)$ . On donne ci-dessous sa courbe représentative  $C_g$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Cette courbe  $C_g$  coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse  $\alpha$ .



- 1) Déterminer la valeur exacte de  $\alpha$ .
- 2) On admet que la fonction  $g$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . Donner, en justifiant, le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

**Partie B – Étude d'une fonction**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2\ln(x)+1}{x}$ .

- 1) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  (on rappelle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ ).

On admettra que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .

- 2) a) Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .  
 b) Étudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire le tableau de variations de la fonction  $f$ .

3) a) Déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

On pourra remarquer que  $f(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) + \frac{1}{x}$ .

b) Soit  $I = \frac{1}{4} \int_1^5 f(x) dx$ . Déterminer la valeur exacte de  $I$ , puis en donner une valeur approchée au centième près.

### Partie C – Application économique

Dans cette partie, on pourra utiliser certains résultats de la partie B.

Une entreprise de sous-traitance fabrique des pièces pour l'industrie automobile. Sa production pour ce type de pièces varie entre 1 000 et 5 000 pièces par semaine, selon la demande.

On suppose que toutes les pièces produites sont vendues.

Le bénéfice unitaire, en fonction du nombre de pièces produites par semaine, peut être modélisé par la fonction  $f$  définie dans la partie B, avec  $x$  exprimé en milliers de pièces et  $f(x)$  exprimé en euros.

1) Déterminer, au centime près, la valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1 000 et 5 000 pièces.

2) *Dans cette question, la réponse sera soigneusement justifiée. Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Pour quelle(s) production(s), arrondie(s) à l'unité près, obtient-on un bénéfice unitaire égal à 1,05 € ?

**EXERCICE 4** (5 points)

*Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Pendant ses vacances d'été, Alex a la possibilité d'aller se baigner tous les jours. S'il va se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de 0,7.  
S'il ne va pas se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de 0,9.  
Le premier jour de ses vacances, Alex va se baigner.

$n$  étant un entier naturel non nul, on note :

- $a_n$  la probabilité qu'Alex n'aille pas se baigner le  $n$ -ième jour.
- $b_n$  la probabilité qu'Alex aille se baigner le  $n$ -ième jour.
- $P_n = (a_n \quad b_n)$  la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le  $n$ -ième jour.

On a donc  $P_1 = (0 \quad 1)$

1) a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (B représentant l'état « Alex va se baigner »).

b) Soit M la matrice de transition associée à ce graphe. Recopier et compléter  $M = \begin{pmatrix} 0,1 & \dots \\ \dots & 0,7 \end{pmatrix}$ .

2) Calculer  $P_3$ ,  $P_{10}$  et  $P_{20}$ . Quelle conjecture peut-on faire ?

3) a) Montrer que pour tout entier  $n$  non nul,  $b_{n+1} = 0,9a_n + 0,7b_n$

b) En déduire que :  $b_{n+1} = -0,2b_n + 0,9$ .

4) On considère la suite  $u$  définie pour tout entier  $n$  non nul par  $u_n = b_n - 0,75$ .

a) Montrer que  $u$  est une suite géométrique de raison  $-0,2$ , on précisera son premier terme.

b) Déterminer la limite de la suite  $u$ .

c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ .

5) On suppose dans cette question que le premier jour de ses vacances, Alex ne va pas se baigner. Quelle est la probabilité qu'il aille se baigner le 20<sup>e</sup> jour de ses vacances ?