

corrigé

le corrigé de spécialité est à la fin

Exercice 1 (sur 4 points) STATISTIQUES

1) Augmentation d'une valeur à une autre

Rappel: augmentation de A à B :

utiliser la formule $\frac{B-A}{A} \times 100$ ou $\left(\frac{B}{A} - 1\right) \times 100$.

Ici, on trouvait $\frac{213,6 - 100}{100} \times 100 = 113,6\%$.

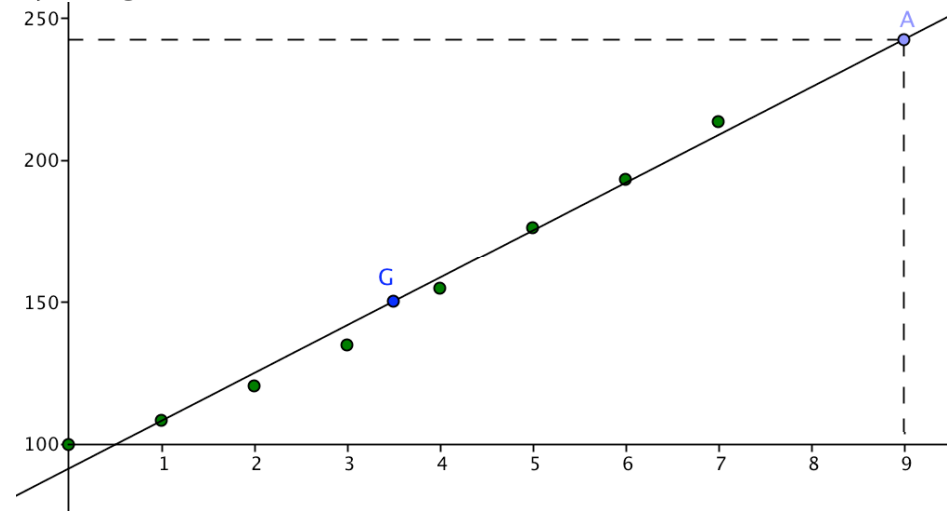
L'augmentation est supérieure à +100% car le nombre a été plus que doublé.

Rappel: variations *spéciales* :

- le nombre est plus que doublé: augmentation de plus de 100%
- le nombre est multiplié par 2: variation de +100%
- le nombre est multiplié par 3: variation de +200% etc.
- le nombre est augmenté mais pas au point d'être doublé: variation entre +0% et +100%

- le nombre est diminué de moitié: variation -50%
- le nombre est divisé par 3: variation -67%
- le nombre est divisé par 10: variation -90%
- le nombre est divisé par 100: variation -99%

2) **nuage:**



voici le nuage avec le point moyen, et la droite des moindres carrés.

La droite doit traverser le nuage au plus près. Si vous obtenez une droite qui ne semble pas coïncider, méfiez vous La droite doit aussi toujours passer par le point G. L'énoncé ne donnait pas l'équation de la droite, ainsi si vous ne la trouviez pas, vous perdiez les questions 4b. et 5. Attention à respecter les échelles demandées.

3) **point moyen:**

on obtient $G(3.5, 150.3)$: c'est le point obtenu en prenant la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées.

4)a) **droite des moindres carrés:**

réponse $y = 16,75x + 91,67$; respecter l'arrondi.

5) prédiction:

• on peut utiliser la formule $y = 16,75 \times 9 + 91,67$ ou lire sur le graphique (dans ce cas bien expliquer, et faire apparaître les traits de constructions, voir le point A). L'énoncé n'imposait pas l'une ou l'autre méthode, le verbe "estimer" gardant toute son ambiguïté.

• On trouve 242,42 avec la formule (ou environ 240 avec la méthode graphique)

Rappel: trouver G sur la calculatrice graphique

• rentrer les valeurs, ça servira aussi pour la droite des moindres carrés, ce n'est pas du temps de perdu.

- sous Casio, CALC Var2 et lire \bar{x} et \bar{y} .
- sous Ti, STAT, Calc, 2varstats

Rappel: trouver la droite des moindres carrés sur la calculatrice graphique

- sous Casio, CALC Reg X et lire a et b.
- sous Ti, STAT, Calc, LinReg(ax+b)

Ces indications sont le cas échéant à adapter légèrement suivant les modèles.

Exercice 2 (sur 5 points) FONCTIONS

1) lectures graphiques:

a) $f(0) = 4$: il suffit de déterminer l'ordonnée à l'origine du graphique

$f'(1) = \frac{3}{4}$: on regarde la tangente en 1 (donc la droite (CF))

et on mesure sa pente en comptant les carreaux (j'avance de 2 je monte de 1,5 donc pente $\frac{1,5}{2}$) ou avec la formule

$\frac{y_F - y_C}{x_F - x_C} = \frac{1,5}{2}$ ce qui revient au même.

$f'(2) = 0$ car en D la tangente est horizontale.

Rappel: tangentes horizontales

« C_f admet une tangente horizontale en a»

cela signifie que

$$f'(a) = 0$$

Plus généralement, si $f'(a) > 0$ cela signifie que la tangente monte (et inversement)

b) & c) signes:

- Vous pouviez présenter sous forme de tableau:

x	-2	0	2	4	5
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	+	+	+	0	-

- Vous pouviez aussi écrire par exemple:

« $f'(x)$ négatif entre -2 et 0 et entre 2 et 5,
et positif entre 0 et 2»

puis

« $f(x)$ positif entre -2 et 4, et négatif entre 4 et 5»

Comment détermine-t-on ces signes ?

- signe de $f(x)$: on le trouve en regardant simplement si la courbe est au-dessus ou en-dessous de l'axe horizontal
- signe de $f'(x)$: on le trouve en regardant si la courbe "monte" ($f' > 0$) ou "descend" ($f' < 0$)

Exercice

Dessiner un morceau de graphe de fonction f avec

- $f' > 0$ et $f > 0$

puis un autre avec

- $f' < 0$ et $f > 0$ et ensuite
- $f' > 0$ et $f < 0$ puis enfin un dernier avec
- $f' < 0$ et $f < 0$

2) fonction composée

a) Dans cet intervalle $f(x) > 0$; or on sait que $\ln u$ est définie pour $u > 0$.

Rappel: Df de certaines composées

- $\ln u$ est définie là où $u > 0$
- \sqrt{u} est définie là où $u \geq 0$
- e^u est définie partout
- $\frac{1}{u}$ est définie là où $u \neq 0$

b) $g(-2) = \ln 9$, $g(0) = \ln 4$, $g(2) = \ln 5$ Il suffit de remplacer x par la valeur demandée.

c) variations de g

si f est croissante, les variations de $f \circ g$ sont les mêmes que celles de g

Or, la fonction \ln est croissante dans son intervalle de définition

On en déduit donc que les variations de $\ln f$ sont les mêmes que celles de f .

Quelles différences y a-t-il alors entre la fonction f et la fonction $\ln f$?

- là où $f \leq 0$, $\ln f$ n'est pas définie: ça fait des "trous" dans le graphique.
- là où $f(x)$ s'approche de 0, $\ln f$ plonge vers $-\infty$
- là où $f(x)$ diverge vers $+\infty$, $\ln f$ y diverge aussi mais beaucoup plus lentement.

d) limites de g

si $x \rightarrow 4$ alors $f(x) \rightarrow 0$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow 4} \ln f(x) = -\infty$
 asymptote verticale $x = 4$

e) résumé

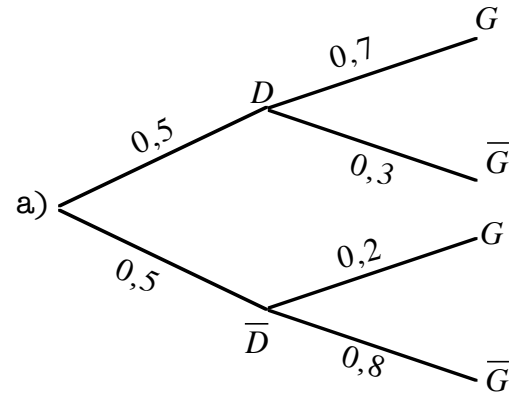
x	-2	0	2	4	5
$g(x)$	↘		↗		↘ -∞

(en général les limites doivent figurer dans le tableau de variations, mais pour les extrema c'est rarement précisé)

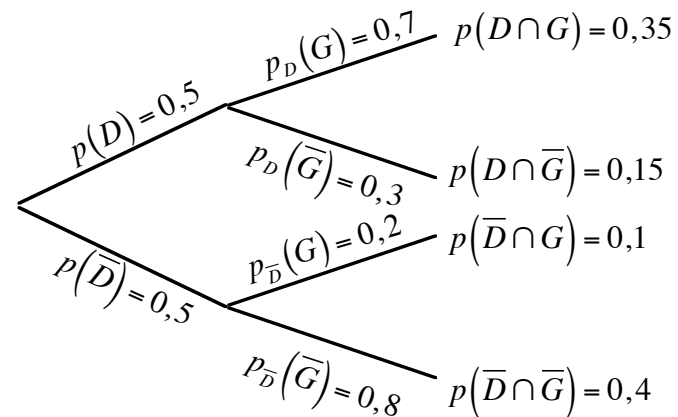
Exercice 3 (sur 5 points) PROBABILITÉS

le corrigé de spécialité est à la fin

1) arbres



en fait on pourrait être plus précis et proposer l'arbre complet:



b) $p(D \cap G) = 0,35$ il suffit de multiplier le long des branches.

Rappel: multiplication le long des branches

Prenons l'arbre ci dessus.

En multipliant on obtient $p(D \cap G) = p(D) \times p_D(G)$

C'est ainsi qu'on a trouvé 0,35.

Si maintenant on tritouille cette formule elle nous

donne $\frac{p(D \cap G)}{p(D)} = p_D(G)$

conclusion: la formule des **probabilités partielles** n'est qu'une simple façon de voir le fait que dans un arbre, on multiplie le long des branches.

c) $p(\bar{D} \cap G) = 0,1$ Idem.

d) $p(G) = 0,45$ On ajoute les deux lignes 0,35 et 0,1.

Rappel: ajout de deux lignes

Prenons l'arbre ci dessus.

En ajoutant la première et la troisième ligne on obtient $0,35 + 0,1 = 0,4$ soit la probabilité de l'événement G.

En effet, ces deux lignes correspondent à la réalisation de l'événement G (les deux autres passent par un chemin \bar{G})

Cela revient à effectuer $p(G \cap D) + p(G \cap \bar{D}) = p(G)$.

La formule des **probabilités totales** peut être vue comme la possibilité d'ajouter des lignes de l'arbre.

e) $p_G(D) = \frac{p(D \cap G)}{p(G)} = \frac{0,35}{0,45} = \frac{7}{9} \approx 0,78$ L'énoncé ne précisant

pas sous quelle forme le résultat était attendu, les deux fractions ou la valeur approchée décimale peuvent convenir.

2) loi binômiale

• il faut justifier:

(N)- le même événement se répète 3 fois

(ind) - de manière indépendante

(p) - avec une probabilité de succès qui est la même à chaque fois

voici, pour comprendre, des contreexemples de situations où l'une des trois conditions n'est pas respectée.

(N) - le joueur joue jusqu'à ce qu'il ait gagné: dans ce cas, on ne sait pas à l'avance le nombre de répétitions qu'il y aura, ce n'est donc pas binomial

(ind) - plus le joueur gagne, plus il se sent en confiance et plus il regagne: dans ce cas la probabilité de victoire à une partie est dépendante de la victoire ou pas à la partie précédente: ce n'est pas binomial

(p) - que le joueur gagne ou perde, il fatigue, et donc plus le temps passe moins il gagne. Dans ce cas p n'est pas constant au fil des parties: ce n'est pas binomial.

à cause de ces trois contreexemples, il faut toujours justifier

(N) - que le nombre de parties est fixé à l'avance

(ind) - que les parties sont indépendantes entre elles

(p) - que la probabilité de succès est la même à chaque fois. et là on peut asséner l'arme binomiale

• $p(2 \text{ victoires}) = \binom{3}{2} 0,45^2 \times 0,55^1 \approx 0,334$

Exercice 4 (sur 6 points) ANALYSE

A) étude de fonction

1)a) dérivation

• La dérivée de $(e^{-0,5x})$ est $(-0,5e^{-0,5x})$: attention à ne pas se tromper !

• on utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$.

$$f(x) = 20(x-1)e^{-0,5x}$$

$$u(x) = 20(x-1) \text{ et } v(x) = e^{-0,5x}$$

$$u'(x) = 20 \text{ et } v'(x) = -0,5e^{-0,5x}$$

$f'(x) = 20e^{-0,5x} + 20(x-1)(-0,5)e^{-0,5x}$ on simplifie:

$$f'(x) = 20e^{-0,5x} - 10(x-1)e^{-0,5x}$$

Rappel: multiplication commutative

comment a ton simplifié: $20(x-1)(-0,5)e^{-0,5x}$?

En remarquant que cette expression est un produit de 4 facteurs. On peut donc mettre ces facteurs dans l'ordre que l'on veut

$$20(x-1)(-0,5)e^{-0,5x} = (x-1)20(-0,5)e^{-0,5x} = 20e^{-0,5x}(-0,5)(x-1)$$

Le plus intéressant c'est de mettre le 20 avec le -0,5:

$$20(x-1)(-0,5)e^{-0,5x} = -10(x-1)e^{-0,5x}$$

$f'(x) = 20e^{-0,5x} - 10(x-1)e^{-0,5x}$ on peut factoriser par $e^{-0,5x}$:

$f'(x) = (20 - 10(x-1))e^{-0,5x}$ on développe dedans:

$$f'(x) = (20 - 10x + 10)e^{-0,5x}$$

$f'(x) = (30 - 10x)e^{-0,5x}$ on factorise par 10 pour obtenir le résultat demandé par l'énoncé.

quand un résultat est donné

- on peut l'utiliser dans les questions suivantes même si on ne l'a pas montré; c'est pour ça qu'il est donné

- on est aidé car on connaît le but

- on peut être perturbé si l'on trouve le résultat sous une forme différente (par exemple si l'on trouve

$f'(x) = (30 - 10x)e^{-0,5x}$ et que l'on ne voit pas qu'il faut

factoriser par 10, on peut croire s'être trompé et perdre du temps)

- le correcteur est plus sévère: il faut absolument tout détailler.

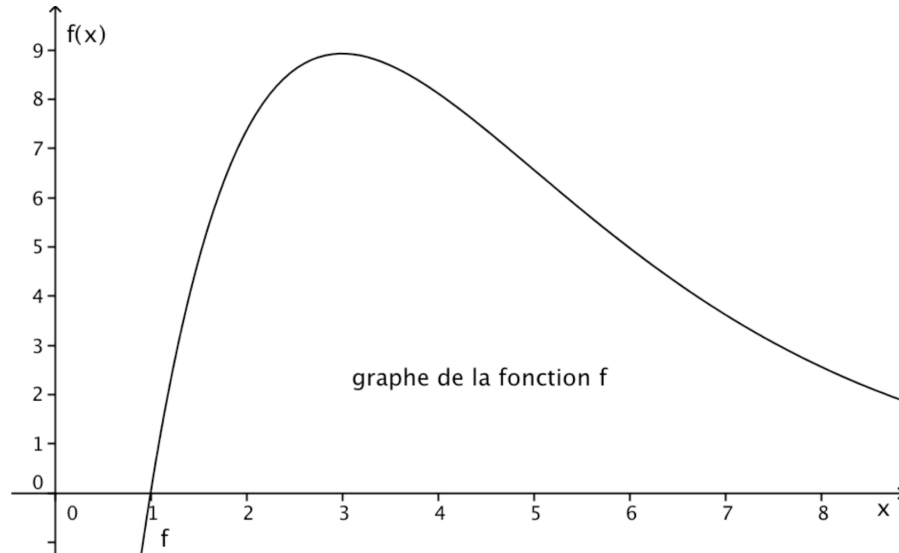
- Si vous ne trouvez pas le bon résultat mais que vous tentiez de gruger le correcteur, vous pouvez compter tout de suite 0 pour cette question

b) $f'(x)$ est du signe de $(-x + 3)$, qui s'annule en 3. Le tableau de variations est donc:

x	0,5	3	8
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

2) courbe

- Ne vous trompez pas dans les échelles (2cm en horizontal et 1cm en vertical).
- si votre courbe ne correspond pas au tableau de variation, vous n'espérez pas obtenir l'indulgence du correcteur.



3) primitive

- Il faut vérifier que $F' = f$.
- Pour cela, deux méthodes:

i) utiliser la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

cela donne $F(x) = \frac{-40(x+1)}{e^{0,5x}}$ donc

$$F'(x) = \frac{-40e^{0,5x} - [-40(x+1)]0,5e^{0,5x}}{(e^{0,5x})^2}$$

on simplifie:

$$F'(x) = \frac{-40e^{0,5x} + 40(x+1)0,5e^{0,5x}}{(e^{0,5x})^2} \text{ et encore:}$$

$$F'(x) = \frac{-40e^{0,5x} + 20(x+1)e^{0,5x}}{(e^{0,5x})^2} \text{ on factorise par exp en haut}$$

$$F'(x) = \frac{(-40 + 20(x+1))e^{0,5x}}{(e^{0,5x})^2} \text{ on simplifie}$$

$$F'(x) = \frac{(-20 + 20x)e^{0,5x}}{(e^{0,5x})^2} \text{ on barre les exp}$$

$$F'(x) = \frac{(-20 + 20x)}{e^{0,5x}} \text{ cqfd.}$$

OU BIEN on remarque que F peut s'écrire

$$F(x) = -40(x+1)e^{-0,5x} \text{ puis là c'est beaucoup plus simple}$$

avec $(uv)' = u'v + uv'$

$$F'(x) = -40e^{-0,5x} - 40(x+1)(-0,5)e^{-0,5x}$$

$$F'(x) = -40e^{-0,5x} + 20(x+1)e^{-0,5x}$$

$$F'(x) = (-40 + 20(x+1))e^{-0,5x}$$

$$F'(x) = (-20 + 20x)e^{-0,5x} = f(x) \text{ quatre lignes...}$$

4) intégrale

$\int_{1,5}^5 f(x) dx = [F(x)]_{1,5}^5 = F(5) - F(1,5)$. On trouve

$$40(2,5e^{-0,75} - 6e^{-2,5}) \text{ ou } 100e^{-0,75} - 240e^{-2,5} \text{ ou } e^{-0,75}(100 - 240e^{-1,75})$$

Valeur approchée (non demandée) : 27,54

Il est important de vérifier sur la calculatrice

- si vous avez une calculatrice formelle, attention elles factorisent toujours les résultats (ça se voit d'ailleurs quand on corrige on els repère tout de suite: ne négligez donc surtout pas les calculs intermédiaires)
- avec les autres calculatrices:

Rappel: intégrale sur la calculatrice

- sur Ti, math, fntint, ensuite taper
fnint(fonction,variable,borneinf, bornesup)

ici donc

fnint($20(x-1)e^{-0,5x}$,x,0,5,5)

- Sur casio option, calc, symbole intégral

\int (fonction,borneinf, bornesup, variable)

ici donc

\int ($20(x-1)e^{-0,5x}$,0,5,5,x)

B) application

1) images simples

attention aux unités.

a) trois choses à dire pour expliquer:

- 220 vélos cela fait $x=2,2$ centaines de vélos
- $f(2,2) = 20 \times 1,2 \times e^{-1,1} = 7,988906...$

- 7,9889 milliers d'euros, cela fait 7989 milliers d'euros en arrondissant à l'unité.

b) $f(4,08) = 8,00977..$ donc bénéfice de 8010€ (+0,25 points)

Remarque: aucune indication n'était donnée sur l'arrondi à fournir.

2) recherche

a) "à perte" peut se traduire par "avec un bénéfice négatif"
Regardons la courbe que nous avons tracée, nous voyons que le bénéfice est positif à partir de $x=1$ soit 100 vélos.

Avec la fonction: $f(x) > 0 \Leftrightarrow 20(x-1)e^{-0,5x} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0$

b) cela correspond à un maximum de $f(x)$ et d'après le graphique OU BIEN d'après le tableau de variations cela faisait 300

c) on veut $f(x) \geq 8$; pour y répondre plusieurs méthodes

- par le calcul c'est impossible
- graphiquement «entre 2 et 4»
- utilisons la question 1 et répondons «entre environ 2,2 et 4,08».

Exercice 2 (5 points) SPÉCIALITÉ

partie I

1)a) connexe: oui. en effet, tout point peut être relié à tout autre point.

1)b) complet: non. en effet, si tout point peut être relié à tout autre (a), ce n'est pas toujours possible en une seule arête.

Exemple: A et G peuvent être reliés en passant par B et D mais il n'y a pas de chemin direct entre A et G.

"complet" cela signifie qu'il y a un chemin direct entre tout point et tout autre point

1)c) chaîne eulérienne: oui car il y a 2 sommets impairs C et D

1)d) cycle eulérien: non justement parce qu'il y a des sommets impairs.

2) CDEF est un sous graphe complet à 4 points donc il faudra au moins 4 couleurs

De plus le sommet maximal est C avec 5 arêtes donc il faudra au plus 6 couleurs

Montrons que 4 couleurs suffisent:

Mettons du bleu en C et G, puis du rouge en A et D, puis du vert en B et F, puis du jaune en E: c'est gagné.

le nombre chromatique est donc 4.

partie II

Dijkstra

A	B	C	D	E	F	G	
O	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A+0
	2A	1A	∞	∞	∞	∞	C+1
	2A		5C	4C	6C	∞	B+2
			3B	4C	6C	∞	D+3
				4C	6C	8D	E+4
					5E	8D	F+5
						7F	

chemin minimal GFEC A, longueur 7